روش‌های تکراری برای حل مسائل کنترل بهینه با معادلات انتگرال ولترا

محمد رضا پیغامی، دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی- دانشکده علوم- peyghami@kntu.ac.ir
محمود هادی زاده یزدی، دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی - دانشکده علوم - hadizadeh@kntu.ac.ir
آسیه ابراهیم زاده، دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی-دانشکده علوم-ebrahimzade@sina.kntu.ac.ir

چکیده: در این مقاله، در ابتدا بسطی از روش تندترین شیب را، برای حل مسائل کنترل بهینه معادلات انتگرال ولترا مطرح می‌کنیم و سپس با هیبرید روش‌های نیوتن و نیوتن دوگامی با روش تندترین شیب کنترل بهینه را محاسبه می‌کنیم. با هیبرید این روش با روش تندترین شیب سرعت همگرایی به جواب سریعتر می‌شود. همگرایی روش‌های فوق را تحت شرایط مطرح شده در [1] بررسی می‌کنیم. نتایج عددی بدست آمده در [1] صحت نتایج تئوری و دقت آن‌ها را نشان می‌دهد.

کلمات کلیدی: کنترل بهینه، تندترین شیب، روش نیوتن دوگامی، اصل ماکزیمم پونتریاگین

1. مقدمه و بیان مسئله

نظریه کلاسیک کنترل بهینه برای سیستم‌هایی که معادله حالت آن‌ها به فرم معادله دیفرانسیل معمولی می‌باشد، مطرح شده است [2].معادله حالت بسیاری از سیستم‌های فیزیکی، صنعتی، زیستی، اجتماعی و به طور کلی سیستم‌هایی که دارای اثر حافظه‌ای می‌باشند را، نمی‌توان به طور مناسبی با معادله دیفرانسیل معمولی توصیف کرد. معادله انتگرال ابزار ریاضی مناسبی برای نمایش این سیستم‌ها است. مساله کنترل بهینه معادلات انتگرال ولترا تاکنون توسط محققین فراوانی هم‌چون وینکورو [3]، مدهین [4]، مولار [5] و بیلباس [6,7,8]مورد بررسی قرار گرفته است. روشی که معمولاً برای حل این مسائل به کار می‌رود بر پایه‌ی اصل ماکزیمم پونتریاگین بوده است.

معادله انتگرال کنترل شده زیر را در نظر بگیرید:

$$x(t) = x(a) + \int_a^t \mathrm{f}(\mathrm{t}, \mathrm{x(s)}, \mathrm{u(s)}, \mathrm{s})\mathrm{ds}$$

که در آن $x(t)$ حالت سیستم کنترل شده و $u(t)$ تابع کنترل می‌باشد و x و u توابع حقیقی مقدار و پیوسته هستند. فرض کنید متغیرهای کنترل باهیچ قیدی محدود نباشند. به دنبال تابع کنترلی هستیم که تابعک معیار

$$J = \int_a^b F(t, x(t), u(t))dt$$

را حداقل کند.

2. روش دو گامی نیوتن و روش تندترین شیب برای محاسبه کنترل بهینه

در این قسمت در ابتدا به توصیف روش‌های دوگامی نیوتن پرداخته و سپس روش تندترین شیب را برای حل مسائل کنترل بهینه مطرح می‌کنیم.

2-1- روش دوگامی نیوتن

فرض کنید G یک عملگر مشتق پذیر فرشه باشد که روی زیر مجموعه محدب D از فضای باناخ x تعریف شده و مقادیر آن در فضای باناخ y قرار می‌گیرد. روش تکراری نیوتن برای یافتن تقریب x^* از معادله عملگری G(x)=0 به صورت زیر مطرح می‌شود:

$$y_n = u_n - (G(u_n))^{-1} G(u_n) \qquad (n \ge 0)$$

این روش و روش‌های دو گامی نیوتن که در ادامه آن‌ها را بیان می‌کنیم در صورتی همگرا هستند که شرایط نیوتن-کانتورویچ [9] برقرار باشند.

روش دو گامی نیوتن زیر دارای مرتبه همگرایی چهار و تکرارها به صورت زیر بیان می‌شوند[10]:

$$y_n = u_n - (G(u_n))^{-1} G(u_n) \qquad (n \ge 0)$$

$$u_{n+1} = y_n - (G(y_n))^{-1} G(u_n) \qquad (n \ge 0) \qquad (1)$$

روش دو گامی دیگری وجود دارد که مرتبه همگرایی آن سه می‌باشد[10] و تکرارها به صورت زیر بیان می‌شود:

$$y_n = u_n - (G(u_n))^{-1} G(u_n) \qquad (n \ge 0)$$

$$u_{n+1} = y_n - (G(u_n))^{-1} G(u_n) \qquad (n \ge 0) \qquad (2)$$

در این روش‌ها تکرارها زمانی متوقف می‌شوند که $|G(u_n)| < \varepsilon$.

2-2- روش تندترین شیب

در این بخش با استفاده از اصل ماکسیمم پونتریاگین، بسطی از روش تندترین شیب را برای حل مسائل کنترل بهینه مطرح می‌کنیم. یک تکرار از این روش به صورت زیر بیان می‌شود:

تابع $u^{(0)}$ را به صورت اختیاری در نظر بگیرید و فرض کنید $u^{(i)}$ تابع کنترل در تکرار i ام باشد. با معلوم بودن $u^{(i)}$ از حل معادله انتگرال

$$x^{(i)}(t) = x(a) + \int_a^t f(t, x^{(i)}(s), u^{(i)}(s), s)ds \qquad (3)$$

$x^{(i)}$ را بدست می‌آوریم.

سپس از معادله‌ی انتگرال زیر $\lambda^{(i)}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\lambda^{(i)}(t) = -\frac{\partial F}{\partial x}(t, x^{(i)}(s), u^{(i)}(s)) + \int_t^b \frac{\partial f}{\partial x}(s, x^{(i)}(t), u^{(i)}(t), t)\lambda^{(i)}(s)ds. \quad (4)$$

تابع هامیلتونین H را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$H(t,x(t),u(t)) = F(t,x(t),u(t)) - \int_t^b f(s,x(t),u(t),t)\lambda(s)ds$$

اگر $\lambda^{(i)}$ و $dx^{(i)}$ و $u^{(i)}$ در رابطه

$$\frac{\partial H^{(i)}}{\partial u} = \frac{\partial H}{\partial u}(t, x^{(i)}, u^{(i)}, \lambda^{(i)}) = 0$$

صدق کند آن‌گاه $u^{(i)}$ کنترل بهینه است. $\varepsilon > 0$ را عدد کوچک اختیاری در نظر گرفته و نرم زیر را در نظر بگیرید:

$$\| \frac{\partial H^{(i)}}{\partial u} \|^{(2)} = \int_a^b \left[\frac{\partial H^{(i)}}{\partial u}(t) \right]^{(2)} dt$$

اگر $\| \frac{\partial H^{(i)}}{\partial u} \|^{(2)} \leq \varepsilon$، آن‌گاه روش تکراری متوقف می‌شود، در غیر این صورت به ازای هر، $t \in [a,b]$، قرار دهید:

$$u^{(i+1)}(t) = u^{(i)}(t) - \tau \frac{\partial H}{\partial u},$$

که در آن $\tau > 0$ از روش جستجوی خطی دقیق به دست می‌آید.

3. روش‌های ترکیبی برای محاسبه کنترل بهینه

در این بخش چند روش ترکیبی برای محاسبه کنترل بهینه مطرح می‌کنیم. روش تندترین شیب دارای همگرایی سراسری است این در حالی است که روش نیوتن دارای همگرایی موضعی می‌باشد. بنابراین، روش‌های ترکیبی منجر به یک روش همگرای سراسری می‌شود که سرعت همگرایی بالاتری نسبت به روش تندترین شیب می‌شوند. الگوریتم این روش به صورت زیر می‌باشد:

1. به ازای هر $t \in [a,b]$، تابع کنترل $u^{(0)}(t)$ را به صورت اختیاری انتخاب کنید و فرض کنید پارامتر γ داده شده باشد. قرار دهید $i = 0$.
2. با حل معادله انتگرال(3)، $x^{(i)}(t)$ را برای هر $t \in [a,b]$، به دست آورید.
3. با جایگزینی $x^{(i)}$ و $u^{(i)}$ در معادله انتگرال(4)، $\lambda^{(i)}$ را محاسبه کنید.
4. $\frac{\partial H^{(i)}}{\partial u}(t)$ را، برای هر $t \in [a,b]$، محاسبه کنید.
5. اگر $\frac{\partial H^{(i)}}{\partial u}(t) \leq \gamma$ آن‌گاه روش تکراری ما متوقف می‌شود در غیر این صورت، اگر شرایط نیوتن–کانتورویچ برقرار باشد، آن‌گاه تابع کنترل جدید به صورت رابطه زیر داده می‌شود:

$$u^{(i+1)} = P(u^{(i)}, y^{(i)}),$$

در غیر این‌صورت قرار دهید:

$$u^{(i+1)} = u^{(i)} - \tau(\frac{\partial H}{\partial u})^{(i)}$$

که در آن τ از روش جستجوی خطی دقیق به دست می‌آید.

6. قرار دهید $i \leftarrow i+1$ و به گام دوم بروید.

توجه شود که در گام 5 از الگوریتم پیشنهاد شده، عملگر P به طور مناسبی توسط روش‌های نیوتن انتخاب می‌شود.

اگر از روش نیوتن استفاده کنید، آن‌گاه:

$$P = u^{(i)} - (\frac{\partial^2 H}{\partial u^2})^{-1}(\frac{\partial H^{(i)}}{\partial u}).$$

اگر از روش دوگامی نیوتن (1) استفاده کنیم، آن‌گاه:

$$P(u^{(i)}, y^{(i)}) = y^{(i)} - (\frac{\partial^2 H^{(i)}}{\partial u^2})^{-1}(\frac{\partial H^{(i)}}{\partial u}|_{u=y^{(i)}}), \quad (5)$$

اگر از روش دوگامی نیوتن (2) استفاده کنیم، آن‌گاه:

$$P(u^{(i)}, y^{(i)}) = y^{(i)} - (\frac{\partial^2 H^{(i)}}{\partial u^2})^{-1}(\frac{\partial H^{(i)}}{\partial u}|_{u=y^{(i)}}), \quad (6)$$

در (5) و (6) تعریف می‌کنیم:

$$y^{(i)} = u^{(i)} - (\frac{\partial^2 H}{\partial u^2})^{-1}(\frac{\partial H^{(i)}}{\partial u}).$$

همگرایی روش تندترین شیب و روشهای هیبریدی در [1] بررسی شده است. هم-چنین نتایج عددی به دست آمده در [1] صحت نتایج تئوری و دقت آن‌ها را نشان می‌دهد.

4. مراجع

[1] ابراهیم‌زاده، آسیه؛ **پایان نامه کارشناسی ارشد؛** دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی، آبان ۱۳۸۸.

[2] Hestens, M. R.; Calculas of variation and Optimal control Theory, John Wiley and Sons, 1966.

[3] Vinokurov, V. R ; "Optimal control of processes described by integral equations, parts I, II, and III", SIAM J. Control, Vol. 7, p.p. 324-355, 1969.

[4] Medhin, N. G.; "Optimal control of processes described by integral equations", J. Math. Anal. Appl, Vol. 120, p.p. 1-12, 1986.

[5] Kamien, M. I.; Muller, E.; "Optimal Control with Integral State Equations", Technical Report.

[6] Belbas, S. A.; "A new method for optimal control of Volterra integral equations", Appl. Math. And Compute, Vol. 43, p.p. 469-473, 1976.

[7] Belbas, S. A.; " Iterative Schemes for Optimal Control of Volterra Integral Equations", Vol. 37, p.p. 57-79, 1976.

[8] Belbas, S. A.; "A Reduction method for Optimal Control of Volterra Integral Equatians", Vol. 197, p.p. 880-890, 2008.

[9] Argyros, I. K.; "0n the Theorem of L.V. Kantorovich Concering Newton's Method ", Appl. Math. And Comput. Vol. 155 , p.p. 223-230, 2003.

[10] Argyros, I. K.; Newton Methods, Nova Science Publisher, Inc, Newyork, 2005.